УДК 532.5: 678.027

Ульев Л.М.

ЛАМИНАРНОЕ КОНФУЗОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ С ЧАСТИЧНЫМ УЧЕТОМ СИЛ ИНЕРЦИИ

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Введение

Исследование ламинарных течений в каналах различной формы относится к фундаментальным задачам гидродинамики, поскольку на его основе проводится решение задач других проблем, возникающих при создании проточных деталей в аппаратах различных отраслей промышленности. Например, при проектировании оборудования для синтеза и переработки полимерных материалов появляется необходимость расчета течения расплавов полимеров в коаксиальных конических каналах, которые являются неотъемлемой частью распределительных устройств экструзионных машин [1,2].

В работах [3, 4] автором решены задачи медленного диффузорного течения в соосном канале, образованном коническими поверхностями с общей вершиной и в соосном коническом канале постоянной ширины. В работах [5,6] исследовались медленные диффузорное и конфузорное течения в соосных конических каналах переменной ширины в случае, когда границы канала не имеют общей вершины.

Однако течение в конических каналах имеет существенную особенность, а именно, изменение средней скорости жидкости вдоль течения вследствие изменения площади поперечного сечения канала. Поэтому инерционная сила, действующая на жидкость, будет отличаться от нуля практически вдоль всей длины канала.

Анализ ламинарного диффузорного и конфузорного течения с учетом инерционных сил, возникающих вследствие изменения вдоль течения площади поперечного сечения канала, образованного коническими поверхностями с общей вершиной, проведен автором в работе [7].

Аналогичные задачи для соосных конических каналов постоянной ширины решены в [8,9].

В данной работе мы определим влияние инерционной силы, возникающей вследствие изменения средней скорости из-за изменения площади поперечного сечения соосного круглого конического конфузора с линейно меняющейся шириной вдоль течения.

Математическая постановка задачи и ее решение

Рассматривать течение в соосном коническом канале будем также, как и ранее в работах [3-9], в биконических координатах (рис. 1), определяемых преобразованием [10]:

$$z' = R\cos\alpha + X\sin\alpha, \tag{1}$$

$$y' = (R\sin\alpha - X\cos\alpha)\sin\varphi = \Omega\ \sin\varphi, \tag{2}$$

$$x' = (R\sin\alpha - X\cos\alpha)\cos\varphi = \Omega\ \cos\varphi. \tag{3}$$

В работе [11] автором показано, что при выполнении условия $R_0 \geq 2{,}22h_0\mathrm{ctg}\alpha$, которое справедливо для большинства практических приложений, влиянием различия в кривизне граничных поверхностей в уравнениях гидродинамики можно пренебречь, а оценки величины членов в системе уравнений движения, записанных в приближении Озеена, выполненные в [6,8,9], позволяет редуцировать эту систему к одному уравнению, которое в безразмерных величинах:

$$t = \xi_1 - \xi, \xi = \frac{R}{h_0}, \chi = \frac{X}{h_0}, V_0 = \frac{Q}{\pi h_0^2\left(2\xi_0\sin\alpha - \cos\alpha\right)}, v = \frac{V}{V_0}, \Pi = \frac{\left(P - P_0\right)h_0}{\mu V_0}, \tag{4}$$

и с учетом направления, т.е. знака скорости жидкости при конфузорном движении, запишется в виде:

$$\mathrm{Re}\,\bar{v}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}, \tag{5}$$

где $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho h v_0}{\mu}$, $\bar{v}$ – безразмерная средняя по поперечному сечению канала скорость жидкости, определяемая как $\bar{v} = \dfrac{Q}{V_0 S}$, а величина:

$$S = \pi h_0^2\left(1 + bt\right)\left[2\left(\xi_1 - t\right)\sin\alpha - \left(1 + bt\right)\cos\alpha\right] \tag{6}$$

определяет площадь поверхности поперечного сечения канала, и тогда:

$$\bar{v} = \frac{2\xi_1\sin\alpha - \cos\alpha}{h(t)\left[2\left(\xi_1 - t\right)\sin\alpha - h(t)\cos\alpha\right]}, \tag{7}$$

где $h(t) = 1 + bt$ – изменение безразмерной ширины канала вдоль течения, а параметр b является тангенсом разности полууглов раскрытия внутренней и внешней поверхности канала (рис. 2), т.е. $b = \mathrm{tg}(\alpha_1 - \alpha)$, и из геометрических соображений его величина должна удовлетворять соотношению (рис. 2):

$$\frac{1}{\xi_0 - \xi_1} < b \leq \frac{\xi_0 tg\alpha - 1}{\xi_1 - \xi_0}. \tag{8}$$

Заметим, что если определить безразмерную площадь поперечного сечения канала, как $s = \dfrac{S}{S_0}$, где $S_0 = \pi h_0^2\left(2\xi_1\sin\alpha - \cos\alpha\right)$ – площадь поперечного сечения канала на входе, то $\bar{v} = \dfrac{1}{s}$, и, соответственно, для изменения s имеем:

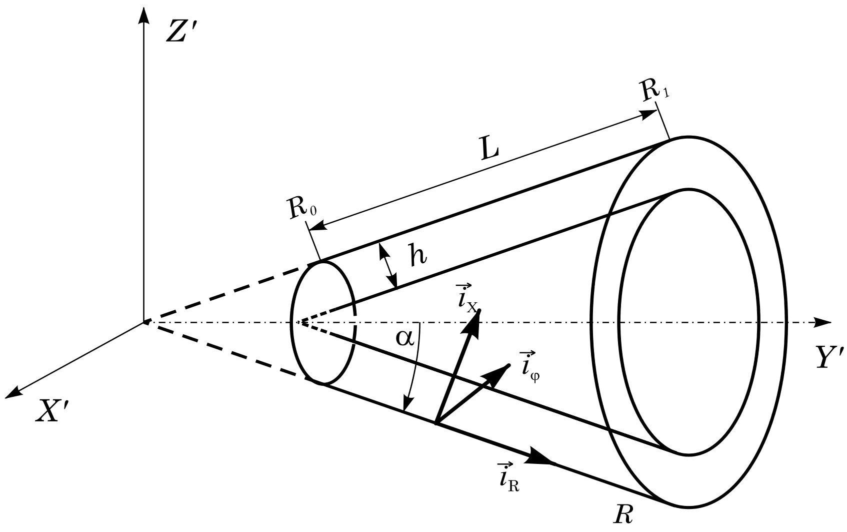

Рисунок 1 – Геометрия соосного конического канала постоянной ширины: *h* – ширина канала; *L* – длина образующих границ канала; *R* – радиальная биконическая координата; $\vec{i}_X, \vec{i}_\varphi, \vec{i}_R$ – орты в биконической системе координат; R_0, R_1 – радиальные координаты входа в соосный конический диффузор постоянной ширины и выхода из него (для конфузора наоборот); *X*', *Y*', *Z*' – координаты в декартовой системе координат; α – полуугол раскрытия конических поверхностей, образующих канал

$$s = \frac{1}{\bar{v}}. \tag{9}$$

Граничными условиями для (5) будут условие прилипания на стенках канала и равенство нулю безразмерного давления на входе в канал:

$$v = 0,\ \chi = 0, \tag{10}$$

$$v = 0,\ \chi = 1 + bt, \tag{11}$$

$$\Pi = 0,\ s = 0. \tag{12}$$

Уравнение неразрывности учтем в форме постоянства расхода жидкости через любое поперечное сечение канала:

$$\int_0^{1+bt} \left[(\xi_1 - t)\sin\alpha - \chi\cos\alpha \right] v d\chi = \frac{1}{2}\left(2\xi_1 \sin\alpha - \cos\alpha\right). \tag{13}$$

При ламинарном течении жидкости в каналах с малыми и умеренными числами Рейнольдса длина начального гидродинамического участка, как правило, сравнима с шириной канала или меньше [12], поэтому далее будем считать профиль скорости сформировавшимся и учитывать только среднее значение инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения, т.е. в производной $\frac{dv}{dt}$ будем использовать значение для $\bar{v}$ и, подставляя (7) в (5), получим:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t}+\mathrm{Re}\left\{-\frac{b\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2}{\left(h(t)\right)^3\left[2\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha-h(t)\cos\alpha\right]^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2\left(2\sin\alpha+b\cos\alpha\right)}{\left(h(t)\right)^2\left[2\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha-h(t)\cos\alpha\right]^3}\right\}=\frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}. \qquad (14)$$

Левая часть (14) не зависит от χ. Обозначая ее через $D(t)$, перепишем (14) в виде:

$$D(t)=\frac{\partial^2 v}{\partial\chi^2}. \qquad (15)$$

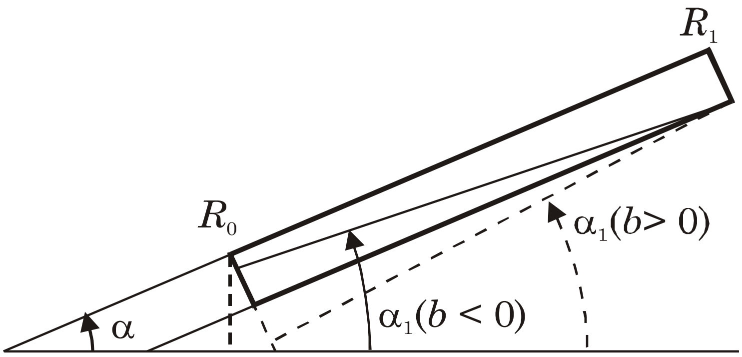

Рисунок 2 – Геометрия соосного конического конфузора с изменяющейся шириной вдоль течения

Интегрируя (15) с граничными условиями (10) и (11), получим:

$$v(t,\chi)=\frac{1}{2}D(t)\left[\chi^2-(1+bt)\chi\right]. \qquad (16)$$

Для определения функции $D(t)$ подставим (16) в (13) и, проинтегрировав полученное выражение, найдем, что

$$D(t)=\frac{12\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)}{(1+bt)^4\cos\alpha-2(1+bt)^3\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha}. \qquad (17)$$

В результате безразмерный градиент давления будет определяться выражением:

$$\frac{d\Pi}{dt}=\frac{12\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)}{(1+bt)^4\cos\alpha-2(1+bt)^3\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha}+$$
$$+\mathrm{Re}\left\{\frac{b\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2}{(1+bt)^3\left[2\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha-(1+bt)\cos\alpha\right]^2}-\right. \qquad (18)$$
$$\left.-\frac{\left(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2\left(2\sin\alpha+b\cos\alpha\right)}{(1+bt)^2\left[2\left(\xi_1-t\right)\sin\alpha-(1+bt)\cos\alpha\right]^3}\right\}.$$

Принимая во внимание (7), выражение (18) мы можем записать в виде:

$$\frac{d\Pi}{dt}=-\frac{12}{\left(h(t)\right)^2}\bar{v}+\mathrm{Re}\,\bar{v}^2\left[\frac{b}{h(t)}-\frac{2\sin\alpha+b\cos\alpha}{2(\xi_1-t)\sin\alpha-h(t)\cos\alpha}\right]. \qquad (19)$$

Чтобы определить явный вид зависимости безразмерного давления от продольной координаты, проинтегрируем (18) вдоль t с учетом (12). Интеграл от первого члена в сумме (18) определяет распределение безразмерного давления в соосном коническом конфузоре при Re = 0, т.е. без учета инерционных сил. Данное распределение получено автором в работе [6], и выглядит оно как:

$$\Pi_1=\int_0^t\frac{12(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha)\,dl}{(1+bl)^4\cos\alpha-2(1+bl)^3(\xi_1-l)\sin\alpha}=$$

$$=\frac{3(2\xi_1-\mathrm{ctg}\,\alpha)}{1+b\xi_1}\left\{\frac{(2+b\,\mathrm{ctg}\,\alpha)^2}{2(1+b\xi_1)^2}\ln\frac{2(\xi_1-t)-(1+bt)\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{(1+bt)(2\xi_1-\mathrm{ctg}\,\alpha)}-\right. \qquad (20)$$

$$\left.-\frac{bt}{1+bt}\left[\frac{2+bt}{1+bt}+\frac{2+b\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{1+b\xi_1}\right]\right\},$$

где l – немая переменная.

Для определения интеграла от второго члена суммы (18) введем следующие обозначения:

$$d=2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha;$$
$$a=2\sin\alpha+b\cos\alpha; \qquad (21)$$
$$c=2(b\xi_1+1)\sin\alpha,$$

и сделаем замену переменной $z = 1 + bt$. В результате запишем:

$$\Pi_2=\mathrm{Re}\left[bd^2\int_1^{1+bt}\frac{dz}{z^3(c-az)^2}-ad^2\int_1^{1+bt}\frac{dz}{z^2(c-az)^3}\right]=$$

$$=\mathrm{Re}\frac{b^2d^2}{a^2}\int_1^{1+bt}\frac{\frac{c}{a}-2z}{z^3\left(\frac{c}{a}-z\right)^3}dz=\left.\frac{1}{2(1+bt)^2\left(1+bt-\frac{c}{a}\right)^2}\right|_0^t \qquad (22)$$

Выполняя подстановку пределов интегрирования и возвращаясь к первоначальным переменным, окончательно получаем:

$$\Pi_2=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1-\left[\frac{2\xi_1-ctg\alpha}{(1+bt)\left[2(\xi_1-t)-(1+bt)ctg\alpha\right]}\right]^2\right\}=$$

$$=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1-\left[\bar{v}(t)\right]^2\right\}. \qquad (23)$$

Выражение (23) определяет изменение безразмерного давления, обусловленное работой инерционных сил, возникающих вследствие изменения площади поперечного сечения канала, и является выражением теоремы Бернулли для стационарного конфузорного течения несжимаемой жидкости в соосных конических каналах с переменной вдоль течения шириной, записанной в безразмерном виде. Общее изменение безразмерного давления вдоль течения будет определяться суммой (20) и (23), т.е.:

$$\Pi(t)=\Pi_1(t)+\Pi_2(t). \tag{24}$$

Подставляя (17) в (16), получим выражение, определяющее распределение скорости в канале:

$$v=\frac{6(2\xi_1\sin\alpha-\cos\alpha)\left[\chi^2-(1+bt)\chi\right]}{(1+bt)^4\cos\alpha-2(1+bt)^3(\xi_1-t)\sin\alpha}, \tag{25}$$

которое полностью идентично распределению, полученному ранее для медленных течений в [6].

Если мы в выражениях (24), (25) и (18) положим $b = 0$, то получим решение задачи ламинарного конфузорного течения с частичным учетом инерционных сил в соосном коническом канале постоянной ширины [9]:

$$\begin{gathered}\Pi_{b=0}=6(2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha)\ln\frac{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha}{2(\xi_1-t)-\operatorname{ctg}\alpha}+\\+\frac{\mathrm{Re}}{2}\left\{1-\left[\frac{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha}{2(\xi_1-t)-\operatorname{ctg}\alpha}\right]^2\right\},\end{gathered} \tag{26}$$

$$\frac{d\Pi_{b=0}}{dt}=-12\bar{v}_{b=0}-2\,\mathrm{Re}\frac{\bar{v}_{b=0}^2}{2(\xi_1-t)-\operatorname{ctg}\alpha}, \tag{27}$$

$$v_{b=0}=\frac{6(2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha)}{2(\xi_1-t)-\operatorname{ctg}\alpha}(\chi-\chi^2), \tag{28}$$

где

$$\bar{v}_{b=o}=\frac{2\xi_1-\operatorname{ctg}\alpha}{2\xi-\operatorname{ctg}\alpha}, \tag{29}$$

средняя скорость при течении в соосном коническом конфузоре постоянной ширины.

Если в (19) положить Re = 0, то мы получим выражение для определения градиента давления в том случае, когда силами инерции можно пренебречь:

$$\frac{d\Pi_1}{dt}=-\frac{12}{h(t)^2}\bar{v}. \tag{30}$$

Если положить в (26), (27) Re = 0 или в (20), (30) положить b = 0, то мы получим распределение безразмерного градиента давления и его градиента для медленного конфузорного течения между эквидистантными коническими поверхностями [6].

Используя полученное решение, можно определить величину чисел Рейнольдса, начиная с которых течение на входе в канал будет происходить в сторону увеличения давления. Понятно, что при этом необходимо выполнение условия:

$$\left.\frac{d\Pi}{dt}\right|_{t-0} = 0\,, \tag{31}$$

и далее используя выражение (18) получим соотношение, связывающее параметр b и число Re', начиная с которого жидкость течет в сторону увеличения давления:

$$\mathrm{Re}' = 6\frac{2\xi_1 - \operatorname{ctg}\alpha}{\xi_1 b - b\operatorname{ctg}\alpha - 1}\,. \tag{32}$$

Понятно, что параметр b должен быть положительным и удовлетворять условию (8).

Если в (32) положить $\alpha = 90°$, то получим соотношение, дающее величину числа Рейнольдса, начиная с которого радиальное сходящееся между плоскостью и конусом с осью перпендикулярной плоскости происходит в сторону увеличения давления:

$$\mathrm{Re}' = \frac{12\xi_1}{\xi_1 b - 1}\,. \tag{33}$$

Положив $b = 0$, мы получим, что $\mathrm{Re}' = -12\xi_1$. Данный результат можно интерпретировать, как то, что течение в сторону увеличения давления при $b = 0$ возможно, но в обратном направлении, т.е. диффузорное течение с координатой входа равной ξ_1, что вполне согласуется с результатами, полученными в [8, 9].

Заключение

В работе решена задача ламинарного конфузорного течения в соосном коническом канале переменной ширины при частичном учете различия в кривизне границ и учетом инерционной силы, возникающей вследствие изменения площади поперечного сечения канала вдоль течения. Получены аналитические выражения для вычисления перепада давления и распределения скорости в канале, а также критические значения чисел Рейнольдса, начиная с которых течение происходит в сторону увеличения давления.

Представленные результаты позволяют выбрать оптимальные технологические и конструкционные параметры экструзионных головок.

Обозначения

h – ширина канала, м; P, P_0 – давление текущее и на входе, Па; Q – объёмный расход, м^3/с; R, R_0, R_1 – координата радиальная и выхода из канала и входа в него, м; V – скорость, м/с; x', y', z' – декартовы координаты, м; α – половина угла внешней конической поверхности, рад; ρ – удельная плотность жидкости, кг/м^3; μ – вязкость, Па·с; Х – поперечная биконическая координата, м; $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho h V_0}{\mu}$ – число Рейнольдса.

Литература

1. Joshi M. V. Dies for plastics extrusion. Delhi: Macmillan. India Limited, 1984. 176 p.

2. Sors L., Bardocz L., Radnoti I. Plastic molds and dies. Budapest: Akademiai Kiado, 1980. 495 p.

3. Ульев Л.М. Медленные течения между соосными коническими поверхностями // ИФЖ. 1998. Т. 71, №. 6. С. 1092-1098.

4. Ульев Л.М. Медленные течения в коаксиальных конических каналах // Вестник ХГПУ. Механика. Машиностроение. Харьков, ХГПУ. 1997. Вып. 7. Ч. 2. С. 22-31.

5. Ульев Л.М. Медленные течения в коаксиальных конических щелях переменной ширины // Вестник ХГПУ. 1999. Вып. 34. С. 3-8.

6. Ульев Л.М. Медленные конфузорные течения в соосных конических каналах переменной ширины // Вестник НТУ "ХПИ". 2002. № 3. Харьков. НТУ "ХПИ". С. 122-130.

7. Ульев Л.М. Решение задачи ламинарного течения между коническими поверхностями с общей вершиной при частичном учете инерционных свойств // Вестник НТУ "ХПИ". 2001. № 3. Харьков. НТУ "ХПИ". С. 224-235.

8. Ульев Л.М. Решение задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины с частичным учетом инерционных свойств // Вестник НТУ "ХПИ". 2002. № 6. Харьков. НТУ "ХПИ". С. 66-71.

9. Ульев Л.М. Влияние инерционных свойств на распределение давления при ламинарном конфузорном течении в соосном коническом канале постоянной ширины // Вестник НТУ "ХПИ". 2002. Вып. 9. Т. 1. Харьков. НТУ "ХПИ". С. 88-94.

10. Гольдин А.М., Карамзин В.А. Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования. М.: Агропромиздат, 1985. С. 264.

11. Ульев Л.М. Влияние кривизны границ на установившееся ламинарное течение в кольцевом коническом канале постоянной ширины // Інтегровані технології та енергозбереження. 2001, № 1. С. 34-44.

12. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.: Госиздат. тех.-теор. лит. 1951. С. 420.

УДК 532.5: 678.027

Ульєв Л.М.

ЛАМІНАРНА КОНФУЗОРНА ТЕЧІЯ У СПІВВІСНОМУ КОНІЧНОМУ КАНАЛІ ЗМІННОЇ ШИРИНИ ІЗ ЧАСТКОВИМ ОБЛІКОМ СИЛ ІНЕРЦІЇ

У роботі одержано рішення задачі ламінарної конфузорної течії рідини в співвісному конічному каналі змінної ширини з частковим урахуванням інерційних властивостей. До розрахунку приймається тільки середня інерційна сила, яка виникає внаслідок зміни середньої швидкості при зміні площі попереднього перерізу каналу вздовж течії.

Одержані аналітичні вирази для розрахунку перепаду тиску при таких течіях.